

XV. Ulusal Mekanik Kongresi, 3-7 Eylül 2007, ISPARTA

ROTOR-PALA SİSTEMLERİNİN LİNEER OLMAYAN TİTREŞİMLERİ: MODELLEME, FREKANS ANALİZİ VE KAOS

Gökhan BULUT ve Özgür TURHAN

İstanbul Teknik Üniversitesi, Makina Fakültesi, 34437 Gümüşsuyu, İstanbul

bulutgo@itu.edu.tr , turhanoz@itu.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada, rotor-pala sistemlerini temsilen, rijid bir rotora bağlı olarak dönen elastik bir çubuğun lineer olmayan titreşimleri ele alınmaktadır. Geometrik ve dinamik nonlinearlıkları hesaba katan matematiksel model, kısmi türevli bir integro-diferansiyel denklem şeklinde elde edilmekte, daha sonra Galerkin yöntemi yardımıyla lineer olmayan bir adi diferansiyel denklem takımına geçilmektedir. İlk olarak, Rotorun sabit hızla dönmesi özel halinde, bir serbestlik dereceli model üzerinde, Lindstedt-Poincaré yöntemi yardımıyla frekans hesabı gerçekleştirilmekte, lineer olmayan unsurların sistemin doğal frekansı üzerindeki etkileri irdelenmektedir. İkinci olarak, rotorun değişken hızla dönmesi halinde, bir serbestlik dereceli model üzerinden sayısal çözüm aracılığıyla, sistemin bazı parametre bileşimlerinde kaotik davranış göstereceği, Lyapunov üssü hesabına dayalı olarak elde edilen kaos kartları ve Poincaré tasvirleri yardımıyla ortaya konulmaktadır.

ABSTRACT

Non-linear vibrations of rotor-blade systems are studied through a rotating beam model. The mathematical model, which takes into account both geometric and dynamic non-linearities, is first obtained as an integro-partial differential equation and then discretized via Galerkin's method. Lindstedt-Poincaré method is used to perform a frequency analysis on a unimodal equation for the special case of a rotor with constant rotation speed. Effects of the system parameters on the fundamental frequency are discussed. Second, chaos analysis is performed on the unimodal equation via Lyapunov exponent calculations and a chaos chart is obtained on a two dimensional parameter space for a special combination of the remaining system parameters. The chart and given Poincaré maps show that the system will exhibit chaotic behaviour at certain combinations of system parameters.

1. GİRİŞ

Helikopter ve uçak pervaneleri, türbo makinalar gibi çok önemli uygulamalara sahip olan rotor-pala sistemlerinin dinamik davranışlarının gerçeğe uygun olarak öngörülebilmesi büyük önem taşımakta, bu yüzden de bu tür sistemler çok sayıda çalışma ve incelemeye konu olmaktadır.

Çoğunlukla lineer modeller üzerinden gerçekleştirilen bu incelemelerde, çeşitli yöntemler yardımıyla, sabit hızla dönen pala ya da çubukların özdeğer analizi [1-5], dalgalanan hızla

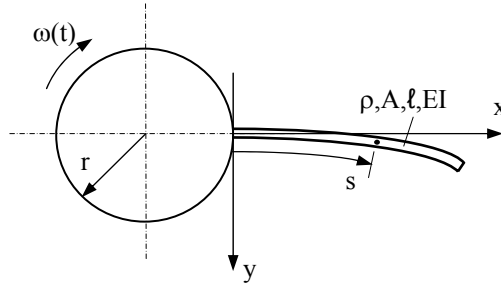
dönen palaların dinamik kararlılığı [6-8], mil ve pala titreşimleri arasındaki bağışıklık etkileri [9-12] gibi problemler ele alınmıştır.

Öte yandan, sınırlı sayıda da olsa, konuyu lineer olmayan modeller yardımıyla ele alan çalışmalar da yok değildir. Bu çerçevede, Rao ve Carnegie [13] bir harmonik denge yöntemi yardımıyla, Hamdan ve Al-Bedoor [14] ise, bir zaman dönüşümü yöntemi yardımıyla, dönen çubukların nonlinear doğal frekans hesabı problemini, Larsen ve Nielsen [15] de, Lyapunov üssü hesabı yardımıyla, rüzgar türbini palalarının nonlinear parametrik kararlılık problemini ele almışlardır.

Bu çalışmada ise, hem geometrik hem (dönmenin dinamiğinden kaynaklanan) dinamik nonlinearlikleri dikkate alan bir matematiksel model yardımıyla; i) Sabit hızla dönen konsol kirişlerin eğilme titreşimlerinde nonlinear frekans hesabı ve frekans cevabı problemleri. ii) Dalgalanan hızla dönen konsol kirişlerde kaos eğilme titreşimlerinde kaos oluşumu problemi ele alınmaktadır. Bu amaçla ilkin sistemin lineer olmayan integro- diferansiyel (kısmi türevli) denklemi elde edilmekte, sonra Galerkin yöntemi yardımıyla problem ayrıklaştırılarak lineer olmayan bir adi diferansiyel denklem takımına geçilmektedir. Bu çalışmada üst modlar ihmal edilerek, inceleme, bu denklemlerden birinci moda karşılık gelen birincisi üzerinde (tek modlu model) sürdürülmekte, frekans ve frekans cevabı hesaplarında bir pertürbasyon yöntemi olan Lindstedt-Poincaré yönteminden, kaos teşhisinde ise Lyapunov üssü hesabından yararlanılmaktadır.

2. MODEL

İncelemede Şekil 1’de gösterilen model esas alınacaktır. Modelde $\omega(t)$ dalgalanan hızı ile dönen r yarıçaplı rotora bağlı pala, Kelvin-Voigt malzeme sönümüne sahip, düzgün kesitli, homojen bir Euler-Bernouilli çubuğu olarak ele alınmıştır.



Şekil 1 Model

Lineer olmayan etkileri göz önüne alan bir model kurmak amacıyla, ρ eğrilik yarıçapı, s çubuk eğilme eksenini izleyen eğrisel koordinat olmak ve üsler s 'ye göre türevleri göstermek üzere

$$M = \frac{EI}{\rho}, \quad \rho = \frac{(1 - y'^2)^{\frac{1}{2}}}{y''} \quad (1)$$

şeklindeki moment-eğrilik yarıçapı ilişkisinde, eğrilik ifadesinin Taylor serisi açılımındaki lineer olmayan terimler hesaba katılmış ve nihai hareket denkleminde üçüncü dereceye kadar olan terimler alıkonulmuştur. Bunun sonucunda palanın (kiriş) dönme düzlemi içindeki eğilme titreşimlerinin lineer olmayan hareket denklemi, EI eğilme rijidliği, A kesit alanı, ρ

yoğunluk, ℓ pala boyu, ζ^* viskoz sönüm katsayısı olmak ve üsler s 'ye, noktalar da zamana göre türevleri göstermek üzere

$$\begin{aligned}
 & EI(y^{IV} + \frac{1}{2}y^{IV}y'^2 + 3y'y''y''' + y''^3) + EI\zeta^*\dot{y}^{IV} + \rho A \left[(1 - \frac{1}{2}y'^2)\ddot{y} + y'y'' \int_s^\ell \ddot{y} d\bar{\sigma} + y' \int_0^s (\dot{y}'^2 + y'\ddot{y}') d\bar{\eta} \right. \\
 & \left. - y'' \int_s^\ell \int_0^{\bar{\sigma}} (\dot{y}'^2 + y'\ddot{y}') d\bar{\eta} d\bar{\sigma} \right] + \rho A \omega^2 \left[-y''[r(\ell-s) + \frac{1}{2}(\ell^2 - s^2)] + y'(r+s) - y(1 - \frac{1}{2}y'^2) - \frac{1}{2}y' \int_0^s y'^2 d\bar{\eta} \right. \\
 & \left. - y'y'' \int_s^\ell \bar{y} d\bar{\sigma} + \frac{1}{2}y'' \int_s^\ell \int_0^{\bar{\sigma}} y'^2 d\bar{\eta} d\bar{\sigma} \right] + \rho A \dot{\omega} \left[yy' + (r+s)(1 - \frac{1}{2}y'^2) + y'y''[r(\ell-s) + \frac{1}{2}(\ell^2 - s^2)] \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \int_0^s y'^2 d\bar{\eta} - y'' \int_s^\ell \bar{y} d\bar{\sigma} \right] + 2\rho A \omega \left[\dot{y}y' - \int_0^s \dot{y}'y' d\bar{\eta} - y'' \int_s^\ell \dot{y} d\bar{\sigma} \right] = 0
 \end{aligned} \quad (2)$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\bar{\eta}$ ve $\bar{\sigma}$, s yerine geçen kukla değişkenlerdir. Bu denklem, rotor hızının ω_0 ortalama değeri etrafında v frekansı ile

$$\omega(t) = \omega_0 + \omega_1 \sin vt \quad (3)$$

şeklinde dalgalandığı kabulü altında ve

$$u = \frac{s}{\ell}, v = \frac{y}{\ell}, \tau = vt, \alpha = \frac{r}{\ell}, \sigma = \frac{\bar{\sigma}}{\ell}, \eta = \frac{\bar{\eta}}{\ell}, \omega^* = \sqrt{\frac{EI}{\rho A \ell^4}}, \bar{\omega} = \frac{v}{\omega^*}, \zeta = \zeta^* \omega^*, \beta = \frac{\omega}{\omega^*}, \beta_0 = \frac{\omega_0}{\omega^*}, \delta = \frac{2\omega_1}{\omega_0} \quad (4)$$

tanımları ışığında boyutsuzlaştırılırsa

$$\beta = \beta_0 (1 + \frac{\delta}{2} \sin \tau) \quad (5)$$

olmak ve üsler u 'ya, noktalar ise τ 'ya göre türevleri göstermek üzere

$$\begin{aligned}
 & \ddot{v} + \frac{\zeta}{\bar{\omega}} \dot{v}^{IV} + \frac{1}{\bar{\omega}^2} \left[v^{IV} + \frac{1}{2}v^{IV}v'^2 + 3v'v''v''' + v''^3 \right] - \frac{1}{2}v'^2\ddot{v} + v'v'' \int_u^1 \ddot{v} d\sigma + v' \int_0^u (\dot{v}'^2 + v'\ddot{v}') d\eta \\
 & - v'' \int_u^1 \int_0^\sigma (\dot{v}'^2 + v'\ddot{v}') d\eta d\sigma + \frac{\beta^2}{\bar{\omega}^2} \left[-v''[\alpha(1-u) + \frac{1}{2}(1-u^2)] + v'(\alpha+u) - v(1 - \frac{1}{2}v'^2) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2}v' \int_0^u v'^2 d\eta - v'v'' \int_u^1 v d\sigma + \frac{1}{2}v'' \int_u^1 \int_0^\sigma v'^2 d\eta d\sigma \right] + \frac{\dot{\beta}}{\bar{\omega}} \left[vv' + (\alpha+u)(1 - \frac{1}{2}v'^2) + v'v''[\alpha(1-u) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2}(1-u^2)] - \frac{1}{2} \int_0^u v'^2 d\eta - v'' \int_u^1 v d\sigma \right] + \frac{2\beta}{\bar{\omega}} \left[\dot{v}v' - \int_0^u \dot{v}'v' d\eta - v'' \int_u^1 \dot{v} d\sigma \right] = 0
 \end{aligned} \quad (6)$$

elde edilir. (6) denkleminde eşlik eden sınır koşulları konsol giriş sınır koşullarından ibarettir. Bu sınır-değer problemi, Galerkin Yöntemi yardımı ile ayrıklaştırılarak, sonlu sayıda adi diferansiyel denklemden oluşan bir denklem takımı ile yaklaşık olarak temsil edilebilir. Bu amaçla çözüm

$$v(u, \tau) = \sum_{i=1}^n g_i(\tau) \cdot \varphi_i(u) \quad (7)$$

n terimli Galerkin serisi ile temsil edilir ve burada karşılaştırma fonksiyonları olarak hareketsiz konsol girişe ait,

$$\varphi_i(u) = \cosh \lambda_i u - \cos \lambda_i u - \kappa_i (\sinh \lambda_i u - \sin \lambda_i u); \quad \kappa_i = \frac{\cosh \lambda_i + \cos \lambda_i}{\sinh \lambda_i + \sin \lambda_i} \quad (8)$$

özfonksiyonları (λ_i 'ler konsol giriş boyutsuz frekansları) kullanılırsa, Galerkin Yönteminin bilinen işlemleri sonucunda

$$\ddot{g}_i + \frac{\zeta}{\omega} \lambda_i^4 \dot{g}_i + \frac{1}{\omega^2} \left[\lambda_i^4 g_i - \beta^2 \sum_{j=1}^n (\alpha A_{ij} + B_{ij} + \delta_{ij}) g_j \right] + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n C_{ijk\ell} g_j g_k \ddot{g}_\ell + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n D_{ijk\ell} g_j \dot{g}_k \dot{g}_\ell + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n [E_{ijk\ell} - \beta^2 F_{ijk\ell}] g_j g_k g_\ell + \frac{2\beta}{\omega} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n G_{ijk} g_j \dot{g}_k + \frac{\dot{\beta}}{\omega} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n [\alpha H_{ijk} + K_{ijk}] g_j g_k = -\frac{\dot{\beta}}{\omega} (\alpha c_i + d_i); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_0^1 [(1-u)\varphi_j'' - \varphi_j'] \varphi_i du, \quad B_{ij} = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} (1-u^2) \varphi_j'' - u \varphi_j' \right] \varphi_i du, \quad c_i = \int_0^1 \varphi_i du, \quad d_i = \int_0^1 u \varphi_i du, \\ C_{ijk\ell} &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{2} \varphi_j' \varphi_k' \varphi_\ell' + \varphi_j'' \varphi_k'' \int_u^1 \varphi_\ell d\sigma + \varphi_j' \int_0^u \varphi_k' \varphi_\ell' d\eta - \varphi_j'' \int_u^1 \int_0^\sigma \varphi_k' \varphi_\ell' d\eta d\sigma \right] \varphi_i du \\ D_{ijk\ell} &= \int_0^1 \left[\varphi_j' \int_0^u \varphi_k' \varphi_\ell' d\eta - \varphi_j'' \int_u^1 \int_0^\sigma \varphi_k' \varphi_\ell' d\eta d\sigma \right] \varphi_i du, \\ E_{ijk\ell} &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \varphi_j^{IV} \varphi_k' \varphi_\ell' + \varphi_j'' \varphi_k'' \varphi_\ell'' + 3 \varphi_j' \varphi_k'' \varphi_\ell''' \right] \varphi_i du, \\ F_{ijk\ell} &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{2} \varphi_j \varphi_k' \varphi_\ell' + \frac{1}{2} \varphi_j' \int_0^u \varphi_k' \varphi_\ell' d\eta d\sigma + \varphi_j'' \varphi_k'' \int_u^1 \varphi_\ell' - \frac{1}{2} \varphi_j'' \int_u^1 \int_0^\sigma \varphi_k' \varphi_\ell' d\eta d\sigma \right] \varphi_i du \\ G_{ijk} &= \int_0^1 \left[\varphi_j' \varphi_k - \varphi_j'' \int_u^1 \varphi_k d\sigma - \int_0^u \varphi_j' \varphi_k' d\eta \right] \varphi_i du, \quad H_{ijk} = \int_0^1 \left[(1-u) \varphi_j' \varphi_k'' - \frac{1}{2} \varphi_j' \varphi_k' \right] \varphi_i du, \\ K_{ijk} &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} (1-u^2) \varphi_j' \varphi_k'' - \frac{1}{2} u \varphi_j' \varphi_k' + \varphi_j \varphi_k' - \varphi_j'' \int_u^1 \varphi_k d\sigma - \frac{1}{2} \int_0^u \varphi_j' \varphi_k' d\eta \right] \varphi_i du \end{aligned} \quad (10)$$

denklemlerine gelinir. Denklem (9), Şekil 1' de gösterilen palanın (kiriş), düzlem içi eğilme titreşimlerinin ayrıklaştırılmış hareket denklemini oluşturmaktadır. Lineer terimler yanında, karesel ve kübik terimler içeren bu denklem, hem parametrik hem de doğrudan zorlama etkisindeki lineer olmayan bir sisteme işaret etmektedir ve bu özellikleriyle son derece karmaşık dinamik davranışlar göstermesi beklenmelidir.

2. FREKANS ANALİZİ

Denklem (9)'da sönüm ihmal edilir ($\zeta = 0$), rotorun sabit hızla döndüğü kabul edilir ($\bar{\omega} = 1, \dot{\beta} = 0 \rightarrow \beta = \beta_0$) ve temel bir inceleme gerçekleştirmekle yetinmek üzere, yalnızca birinci titreşim modu ele alınırsa ($n=1$), g_1 yerine, gösterilim kolaylığı bakımından g yazarak,

$$a = 2.143318, b = 4.596773, c = 10.110166 + 0.155068\beta^2, \Omega_0^2 = 12.362363 + (0.193336 + 1.571878\alpha)\beta^2 \quad (11)$$

tanımları altında

$$\ddot{g} + \Omega_0^2 g + a g^2 \ddot{g} + b g \dot{g}^2 + c g^3 = 0 \quad (12)$$

veya burada $g = \sqrt{\varepsilon} \cdot x$ değişken dönüşümü yapılarak

$$\ddot{x} + \Omega_0^2 x + \varepsilon (a x^2 \ddot{x} + b x \dot{x}^2 + c x^3) = 0 \quad (13)$$

tek modlu (unimodal) denklemi elde edilir. Bu denklem, belli bir yaklaşıklıkla, dönen nonlinear kirişin birinci moddaki eğilme titreşimlerini temsil etmektedir.

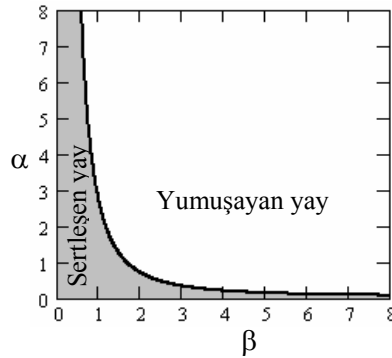
Bu denklemin, $x(0) = X_0$, $\dot{x}(0) = 0$ başlangıç koşulları altındaki yaklaşık çözümünü elde etmek üzere, bir pertürbasyon yöntemi olan Lindstedt-Poincaré yöntemine başvurulur ve sonuçta $\varepsilon = 1$ konulursa, küçük genliklerde yaklaşık olarak geçerli bir doğal frekans ifadesi olarak

$$\Omega = \left[1 + \frac{1}{8} \left[b + 3 \left(\frac{c}{\Omega_0^2} - a \right) \right] X_0^2 \right] \Omega_0 \quad (14)$$

elde edilir. Beklendiği üzere doğal frekans, sistem parametrelerinin yanı sıra X_0 genliğine de bağlıdır. Denklem (14)'teki c ve Ω_0 (lineer doğal frekans) büyüklüklerinin Denk. (11) uyarınca sistem parametreleri α ve β ya bağlı olduklarına dikkat edilirse,

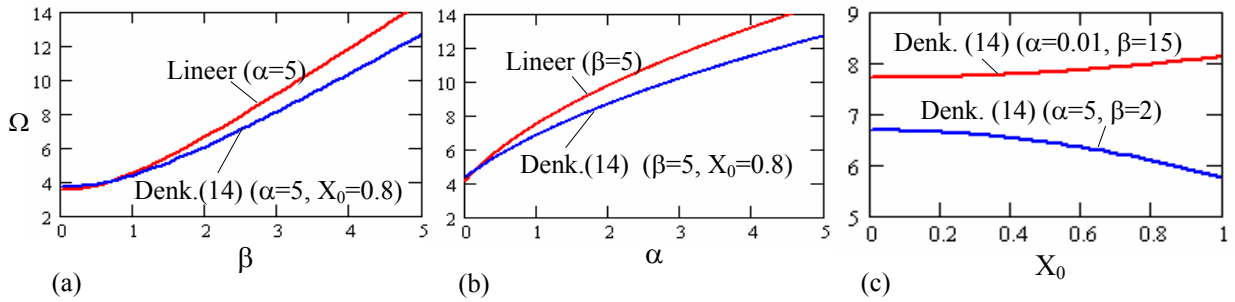
$$b + 3 \left(\frac{c(\beta)}{\Omega_0^2(\alpha, \beta)} - a \right) = 0 \quad (15)$$

eşitliğinin sağlandığı α - β bileşimlerinde frekansın genlikten bağımsız kalacağı ve bu denklemin, α - β düzleminde frekansın genlikle arttığı (sertleşen yay) parametre bölgesi ile frekansın genlikle azaldığı (yumuşayan yay) parametre bölgesini ayıran bir sınır vereceği anlaşılır. Şekil 2'de bu sınır ve ayırdığı parametre bölgeleri gösterilmiştir. Bu tespit önemlidir, çünkü, dönme hızına bağlı olarak, aynı palanın bazen yumuşayan, bazen sertleşen bir yay olarak davranabileceğini; yani çalışma sırasında davranışında nitel bir değişiklik ortaya çıkabileceği göstermektedir.



Şekil 2 Yumuşayan-Sertleşen yay

Şekil 3 a, b ve c'de ise, Denk. (14) uyarınca, doğal frekansın sistem parametreleri ve genlik ile değişimi görülmektedir. Şekil 3 a,b'de, lineer modele ait frekans eğrileri de gösterilmiştir.



Şekil 3 Doğal frekansın a) β ile, b) α ile, c) X_0 ile değişimi

Burada, doğal frekansların beklendiği gibi, α ve β ile arttığı, lineer olmayan modele ait frekans eğrilerinin, genliğe bağımlılığın bir sonucu olarak, lineer modele ait frekans eğrilerinden ayrıldığı görülmektedir. Şekil 3 c’de ise lineer olmayan modele ait frekansların genlik ile değişimi verilmiştir. Görüldüğü gibi, yumuşayan yaya karşılık gelen parametre bileşiminde ($\alpha=5$, $\beta=2$), frekans genlikle azalırken, sertleşen yaya karşılık gelen parametre bileşiminde ($\alpha=0.01$, $\beta=15$) genlikle artmaktadır.

Şimdi, Denk. (13) ile tanımlı sistemde sönüm de hesaba katılarak, frekans cevabı problemi ele alınsın ve ilk olarak, sistemin, *esas rezonans* ($\Omega \approx \Omega_0$) civarındaki davranışı incelensin. Lineer olmayan terimlerin, sönümün ve zorlayıcı kuvvet genliğinin etkilerinin ε mertebesinde olduğu kabulü ile, bu durumda (13) denklemi yerine,

$$2\varepsilon\mu = \zeta \lambda_1^4 \quad (16)$$

olmak üzere

$$\ddot{x} + \Omega_0^2 x + \varepsilon(2\mu\dot{x} + a x^2\ddot{x} + b x\dot{x}^2 + c x^3) = \varepsilon f \cos\Omega\tau \quad (17)$$

yazılabilir. Denk. (17)’nin,

$$\Omega = \Omega_0 (1 + k\varepsilon) \quad (18)$$

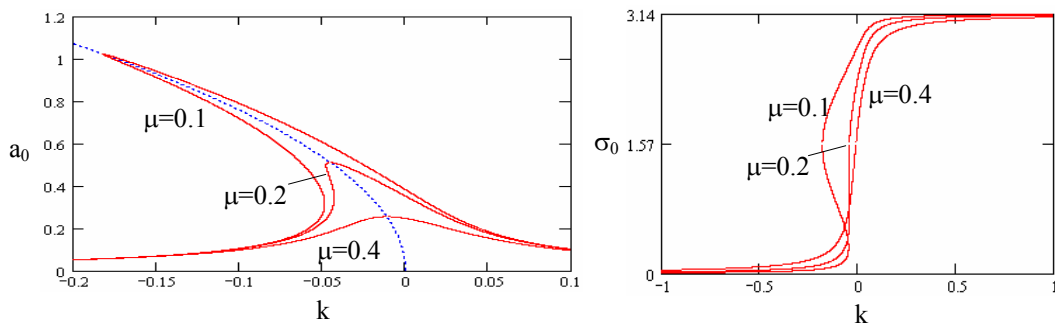
kabulü altında Lindstedt-Poincaré yöntemiyle çözümü,

$$x(\tau) = a_0 \cos[\Omega\tau - \sigma_0] + O(\varepsilon) \quad (19)$$

verir. Buradaki a_0 zorlanmış titreşim genliği ve σ_0 faz açısı ile zorlayıcı kuvvet frekansı Ω ’nın Ω_0 ’dan farklılığını ölçen k parametresi arasında,

$$k = -\frac{a_0^2}{8} \left[3\left(a - \frac{c}{\Omega_0^2}\right) - b \right] \mp \frac{1}{\Omega_0^2} \sqrt{\frac{f^2}{4a_0^2} - \mu^2 \Omega_0^2}, \quad \sigma_0 = a \tan \frac{\mu}{-\Omega_0 \left\{ k + \frac{a_0^2}{8} \left[3\left(a - \frac{c}{\Omega_0^2}\right) - b \right] \right\}} \quad (20)$$

bağıntıları mevcuttur.

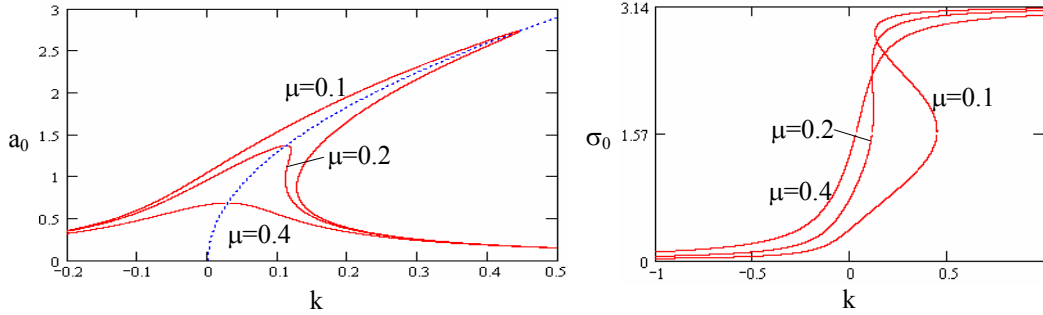


Şekil 4 Sistemin esas rezonans civarındaki frekans cevabı ($f=2$, $\alpha=2$, $\beta=5$; yumuşayan yay)

Şekil 4, palanın, yumuşayan yay olarak davranmasına karşılık gelen, Şekil 5 ise, sertleşen yay olarak davranmasına karşılık gelen parametre bileşimleri için Denk. (20)’den elde edilmiş frekans cevaplarını göstermektedir.

Bu şekillerin incelenmesinden şu sonuçlara varılır. Beklentilere uygun bir biçimde, Şekil 4’de yumuşayan yay etkisi ile rezonans eğrileri sola, Şekil 5’de ise sertleşen yay etkisi ile sağa

yatmakta, her iki durumda da sıçrama olayı gözlenmektedir. Sönüm ise, genlik tepelerini aşağıya çekici, bunun sonucu olarak da belli bir değerden sonra sıçrama olayını ortadan kaldırıcı etki yapmaktadır.



Şekil 5 Sistemin esas rezonans civarındaki frekans cevabı ($f=2$, $\alpha=0.5$, $\beta=1$; sertleşen yay)

İkinci olarak, sistemin, *harmonik üstü rezonans* ($\Omega \approx \frac{1}{3}\Omega_0$) civarındaki davranışı incelenir. Ancak bu kez, (17)'de zorlayıcı kuvvet etkisinin ε mertebesinde olduğu kabulü kaldırılarak

$$\ddot{x} + \Omega_0^2 x + \varepsilon(2\mu\dot{x} + a x^2\ddot{x} + b x\dot{x}^2 + c x^3) = f \cos \Omega \tau \quad (21)$$

denklemini ele alınsın. Esas rezonansa ait frekans cevabının elde edilmesine benzer şekilde ancak bu kez

$$\Omega = \frac{1}{3}\Omega_0(1 + k\varepsilon) \quad (22)$$

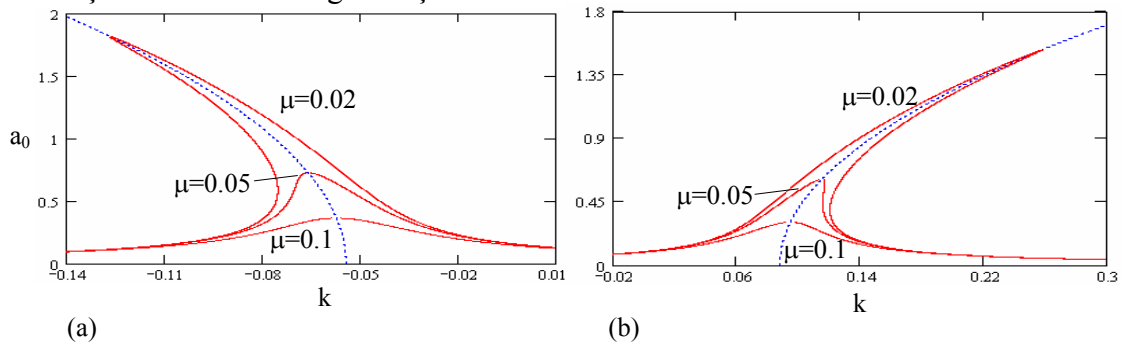
kabulü ile hesap yapılırsa,

$$x(\tau) = a_0 \cos[3\Omega\tau - \sigma_0] + \frac{9f}{8\Omega_0^2} \cos \Omega\tau + O(\varepsilon) \quad (23)$$

çözümü ve

$$k = -\frac{a_0^2}{8} \left[3\left(a - \frac{c}{\Omega_0^2}\right) - b \right] - \frac{9f^2}{16^2\Omega_0^4} \left[11a - b - \frac{27c}{\Omega_0^2} \right] \mp \frac{1}{\Omega_0^2} \sqrt{\left[\frac{9^2 f^3}{16^3 \Omega_0^4 a_0} \left(a + b - \frac{9c}{\Omega_0^2} \right) \right]^2 - \mu^2 \Omega_0^2} \quad (24)$$

elde edilir. Denklem (24)'den elde edilen Şekil 6 incelenirse, sistemin harmonik üstü rezonans civarındaki frekans cevabının da, esas rezonans civarındakine benzer şekilde, sıçrama olayı göstereceği, sistem parametrelerine bağlı olarak sertleşen ya da yumuşayan yay karakterinde olabileceği ve sönümden, rezonans tepelerinin alçalması ve sonunda sıçrama olayının yok olması şeklinde etkileneceği anlaşılr.



Şekil 6 Sistemin harmonik üstü rezonans civarındaki frekans cevabı,
a) $f=12$, $\alpha=1$, $\beta=2$; yumuşayan yay, b) $f=12$, $\alpha=0.5$, $\beta=0.5$; sertleşen yay.

Son olarak, sistemin, *harmonik altı rezonans* ($\Omega \approx 3\Omega_0$) civarındaki davranışı incelenir. Yine Denk. (21)'den, fakat bu kez de

$$\Omega = 3\Omega_0(1 + k\varepsilon) \quad (25)$$

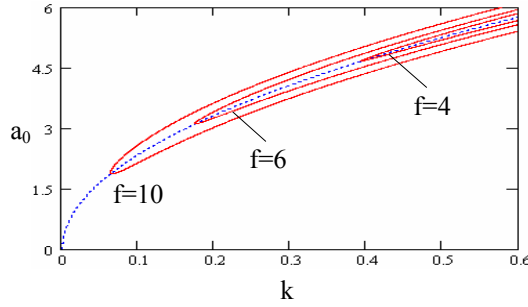
alınarak hesap yapılırsa,

$$x(\tau) = a_0 \cos\left[\frac{\Omega}{3}\tau - \sigma_0\right] - \frac{f}{8\Omega_0^2} \cos\Omega\tau + O(\varepsilon) \quad (26)$$

çözümüne ve

$$k = -\frac{a_0^2}{8} \left[3\left(a - \frac{c}{\Omega_0^2}\right) - b \right] - \frac{f^2}{16^2 \Omega_0^4} \left[19a - 9b - \frac{3c}{\Omega_0^2} \right] \mp \frac{1}{\Omega_0^2} \sqrt{\left[\frac{f a_0}{64} \left(-11a + 5b - \frac{3c}{\Omega_0^2} \right) \right]^2 - \mu^2 \Omega_0^2} \quad (27)$$

ifadesine ulaşılır. Denklem (27)'den, zorlayıcı kuvvet genliğinin farklı değerleri için elde edilen frekans cevapları Şekil 7'de verilmiştir. Bu şekilden, harmonik altı rezonansın ancak büyük f kuvvet genlikleri halinde etkili olacağı ve esas ve harmonik üstü rezonanslardan farklı olarak, harmonik altı rezonansta sıçrama olayının ortaya çıkmayacağı görülmektedir.



Şekil 7 Sistemin harmonik altı rezonans civarındaki frekans cevabı ($\mu=0.1$, $\alpha=0.5$, $\beta=2$)

Burada dönen kirişin birinci mod davranışıyla ilgili olarak elde edilen sonuçlar, büyük ölçüde, kübik geri getirme kuvvetine sahip tek serbestlik dereceli sistemlerin (Duffing denklemi) bilinen sonuçlarıyla örtüşmektedir [16].

3. KAOS

Şimdi de, rotor-pala sisteminde, rotorda harmonik bir hız dalgalanması olması halinde ortaya çıkacak titreşimlere eğilinsin. Bu amaçla Denklem (9)'a dönülür ve yine $n=1$ alınarak, birinci moda ilişkin denklemin elde edilmesiyle yetinilirse,

$$A_{11} = -1.570878, B_{11} = -1.193336, C_{1111} = 2.143318, D_{1111} = 4.596773, c_1 = 0.782991, d_1 = 0.568825, \\ E_{1111} = 10.110166, F_{1111} = 0.155068, G_{1111} = 0, H_{1111} = -1.736491, K_{1111} = -0.290536, \beta = \beta_0(1 + \frac{\delta}{2} \sin \tau) \quad (28)$$

olmak üzere ve gösterim kolaylığı açısından indisler kaldırılarak

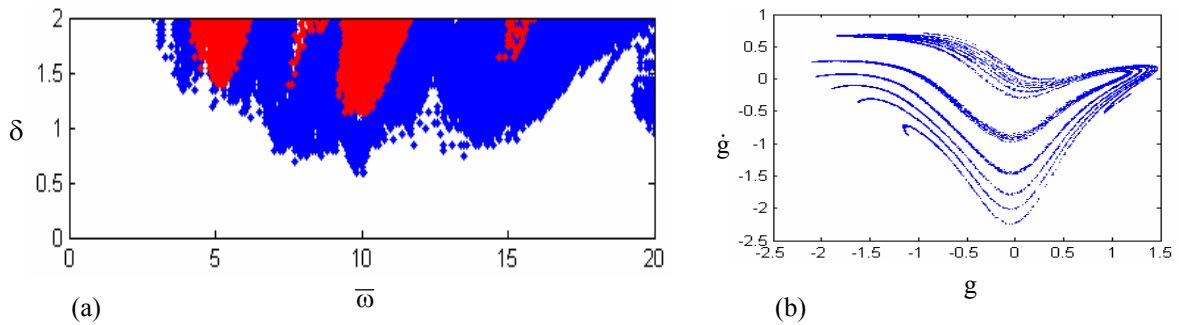
$$\ddot{g} + \frac{\zeta}{\omega} \lambda_1^4 \dot{g} + \frac{1}{\omega^2} \left[\lambda_1^4 - \beta^2(\alpha A + B + 1.0) \right] g + Cg^2 \ddot{g} + Dg\dot{g}^2 + \frac{1}{\omega^2} \left[E - \beta^2 F \right] g^3 + \frac{\dot{\beta}}{\omega} [\alpha H + K] g^2 = -\frac{\dot{\beta}}{\omega} (\alpha c + d) \quad (29)$$

elde edilir. Denklem (29)'a göre, harmonik bir hız dalgalanması, Şekil 1'de verilen rotor-pala sisteminde, hem dış hem parametrik zorlamaya yol açmaktadır. Bu zorlamaların etkisi altında, sistemin kaotik davranışlar gösterip göstermeyeceği incelenmek istensin.

Bir dinamik sistemde, sistem davranışlarının başlangıç koşullarına aşırı duyarlılığının kaosa neden olduğu bilinmektedir. Bu duyarlılığın bir ölçüsünü oluşturan Lyapunov üsleri de, en

önemli kaos ölçütlerinden biri olarak kabul edilir. Özel olarak, bir dinamik sistemde, belli bir parametre bileşiminde Lyapunov üslerinden en az birinin pozitif olması, sistemin o parametre bileşiminde kaotik davranış göstereceğine işaret eder [17-18].

Bu çalışmada, inceleme, en büyük Lyapunov üssünün elde edilmesine yönelik bir algoritma [18-21] yardımıyla gerçekleştirilmiştir. Bu amaçla, $\alpha = 1$, $\beta_0 = 5$, $\zeta = 0.001$ parametreleriyle tanımlı bir rotor-pala sistemi örneği ele alınmış, özel olarak geliştirilen ve sayısal integrasyonda Runge-Kutta(4) yöntemini kullanan bir FORTRAN programından yararlanılarak, Lyapunov üssünün pozitif değer aldığı noktalar işaretlenmiş ve $\bar{\omega} - \delta$ parametre düzleminde, Şekil 8a'da gösterilen kaos kartı elde edilmiştir. Bu şekle göre, ele alınan rotor-pala modelinin kaotik davranış göstereceği geniş parametre bölgelerinin bulunduğu anlaşılmaktadır. Farklı renkle gösterilen dört adet iç bölge, sistemin kararlılığını yitirdiği (genliğin sınırsız büyüdüğü kaotik ya da periyodik titreşimler) parametre bileşimlerinde karşılık gelmektedir.



Şekil 8 a) Lyapunov üssü hesabına dayalı kaos kartı, b) Poincaré tasviri ($\bar{\omega}=7$, $\delta=1.8$, $\zeta=0.1$)

Şekil 8b'de ise, $\bar{\omega}=7$, $\delta=1.8$, $\zeta=0.1$ parametre değerlerine karşılık gelen kaotik bir harekete ilişkin Poincaré tasviri verilmiştir. Poincaré tasvirinin fraktal yapısı, hareketin kaotik olduğunun açık bir göstergesidir.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, değişken hızlı bir rotora bağlı olarak dönen bir palanın (kiriş) lineer olmayan, kısmi türevli hareket denklemi elde edilmiş, bu denklemin Galerkin yöntemi yardımı ile ayrıklaştırılması ile de lineer olmayan adi diferansiyel denklemlerden oluşan bir denklem takımına ulaşılmıştır.

İncelemelerde, birinci titreşim modunu temsil eden tek bir denklem ele alınmış ve ilk olarak, rotorun sabit hızla dönmesi halinde, sistem doğal frekansı ile esas, harmonik üstü ve harmonik altı rezonans civarındaki frekans cevapları elde edilmiştir. Bu sınırlı inceleme, dönen bir palanın, dönme hızına bağlı olarak, sertleşen ve yumuşayan yay karakterleri arasında geçiş yapacak şekilde nitelik değiştirebileceği önemli sonucunu vermiştir. Ref. [14]'te, yetersiz bir incelemeyle varılan sonuçla çelişen bu sonucun daha yüksek serbestlik dereceli modeller yardımıyla sınanması için araştırma sürdürülmektedir.

İkinci olarak, rotorun değişken hızla dönmesi hali için, Lyapunov üssü hesabına dayalı bir kaos incelemesi yapılmış, daha önce yazarlar tarafından yapılan basitleştirilmiş bir incelemenin [21] verdiği sonuca paralel olarak, sistemin belli parametre bileşimlerinde kaotik davranış göstereceği belirlenmiş ve sistem parametrelerinden oluşan bir parametre düzleminde bir örnek kaos kartı verilmiştir. Bu sonuç da, örneğin mil burulma titreşimlerinden kaynaklanan bir hız dalgalanmasının rotor-pala sistemlerinde kaotik

davranışlara yol açabileceğini gösteren ve tasarım sırasında buna da dikkat edilmesi gereğine işaret eden önemli bir sonuç olarak görülmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Southwell R. V., Gough B. S., “On The Free Transverse Vibrations Of Airscrew Blades”, British A.R.C. Report and Memoranda, 766,1921.
- [2] Lakin W. D., “Vibrations of A Rotating Flexible Rod Clamped Off The Axis Of Rotation”, Journal of Engineering Mathematics, 10(4),1976,313-321.
- [3] Gürgöze M., “On The Dynamical Behaviour Of A Rotating Beam”, J. of Sound and Vibration, 143(2),1990,356-363.
- [4] Naguleswaran S., “Lateral Vibrations Of Centrifugally Tensioned Uniform Euler-Bernoulli Beam”, J. of Sound and Vibration, 176(5),1994,613-624.
- [5] Nayfeh A. H., Emam S. A., Preidikman S., Mook D. T., “An Exact Solution For The Natural Frequencies Of Flexible Beams Undergoing Overall Motions” J. of Vibration and Control, 9,2003,1221-1229.
- [6] Şakar G., Sabuncu M., “Dönen Asimetrik Kesitli Çubukların Dinamik Kararlılığı”, 11. Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu, Ankara, 2003.
- [7] Turhan Ö., Bulut G., “Dynamic Stability Of Rotating Blades (Beams) Eccentrically Clamped To A Shaft With Fluctuating Speed”, J. of Sound and Vibration, 280,2005, 945-964.
- [8] Al-Bedoor B. O., Al-Qaisia A. A. “Stability Analysis Of Rotating Blade Bending Vibration Due To Torsional Excitation”, 282,2005,1065-1083.
- [9] Okabe A., Otawara Y., Kaneko R., Matsushita O., Namura K., “An Equivalent Reduced Modelling Method and Its Application To Shaft-Blade Coupled Torsional Vibration Analysis Of A Turbine-Generator Set, J. of Power and Energy, 205,1991,173-181.
- [10] Chun S. B., Lee C. W., “Vibration Analysis Of Shaft-Bladed Disk System By Using Substructure Synthesis And Assumed Modes Method, Journal of Sound and Vibration, 189(5),1996,587-608.
- [11] Kopmaz O., Anderson K. S., “On The Eigenfrequencies Of A Flexible Arm Driven By A Flexible Shaft” J. of Sound and Vibration, 240(4),2001,679-704.
- [12] Turhan Ö., Bulut G., “Linearly Coupled Shaft-Torsional And Blade-Bending Vibrations In Multi-Stage Rotor-Blade Systems”, J. of Sound and Vibration, 296,2006,292-318.
- [13] Rao J. S., Carnegie W., “Non-Linear Vibrations Of Rotating Cantilever Beams”, The Aeronautical Journal of The Royal Aeronautical Society,74,1970,161-165.
- [14] Hamdan M. N., Al-Bedoor B. O., “Non-Linear Free Vibrations Of A Rotating Flexible Arm”, J.of Sound and Vibration, 242(5),2001,839-853.
- [15] Larsen J. W., Nielsen S. R. K., “Non-Linear Dynamics Of Wind Turbine Wings”, Int. J. of Non-Linear Mechanics, 41,2006,629-643.
- [16] Nayfeh, A. H., Mook D. T., Nonlinear Oscillations, John Wiley & Sons, Inc., 1979.
- [17] Moon F. C., Chaotic and Fractal Dynamics, John Wiley & Sons, Inc., 1992.
- [18] Argyris J., Faust G., Haase M., An Exploration Of Chaos, North-Holland, 1994.
- [19] Wolf A., Swift J. B., Harry L. S., Vastano J. A.,”Determining Lyapunov Exponents From A Time Series”, Physica D,16,1985,285-317.
- [20] Rosenstein M. T., Collins J. J.,De Luca C. J., “A Practical Method For Calculating Largest Lyapunov Exponents From Small Data Sets”, Physica D, 65,1993,117-134.
- [21] Bulut G., Turhan Ö., “Hız Dalgalanmaları Bir Rotor-Pala Sisteminde Kaotik Davranışlara Yol Açabilir mi? (Basitleştirilmiş Bir İnceleme), 12. Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu, Kayseri, 2005.